

Reg. No. :

Code No. : 30580 B Sub. Code : SMMA 63

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2020.

Sixth Semester

Mathematics — Core

GRAPH THEORY

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $K_{3,4}$ -இல் உள்ள கோடுகளின் எண்ணிக்கை

(அ) 7

(ஆ) 12

(இ) 3

(ஈ) 4

The number of edges in $K_{3,4}$ is

(a) 7

(b) 12

(c) 3

(d) 4

2. ஒரு ஒழுங்கு வரைபில் $\delta = 8$ எனில் $\Delta =$ _____.

(அ) 8

(ஆ) 7

(இ) 9

(ஈ) 16

If $\delta = 8$ for a regular graph then $\Delta =$ _____.

(a) 8

(b) 7

(c) 9

(d) 16

3. வரைவு G -யின் பாலம் e எனில் $w(G - e) =$ _____.

(அ) $w(G) - 1$

(ஆ) $w(G)$

(இ) $w(G) + 1$

(ஈ) $2w(G)$

If e is a bridge of graph G then $w(G - e) =$ _____.

(a) $w(G) - 1$

(b) $w(G)$

(c) $w(G) + 1$

(d) $2w(G)$

4. C_4 -ன் வெட்டுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(அ) 1

(ஆ) 0

(இ) 3

(ஈ) 2

Number of cut points of C_4 is

(a) 1

(b) 0

(c) 3

(d) 2

5. வழக்கமான குறியீட்டின் படி, $|V| - |E| + |F| =$ _____.

(அ) 2 (ஆ) 1

(இ) 0 (ஈ) 3

With usual notations, $|V| - |E| + |F| =$ _____.

(a) 2 (b) 1

(c) 0 (d) 3

6. T ஒரு (p, q) மரம் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது தவறு?

(அ) T ஒரு சுழலற்ற தொடுத்த வரைபு

(ஆ) T ஒரு தொடுத்த ஒழுங்கு வரைபு

(இ) T ஒரு தொடுத்த வரைபு, $q = p - 1$

(ஈ) T ஒரு சுழலற்ற வரைபு, $q = p - 1$

If T is a (p, q) tree then which statement is false?

(a) T is a connected acyclic graph

(b) T is a connected regular graph

(c) T is a connected graph, $q = p - 1$

(d) T is an acyclic graph, $q = p - 1$

7. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது ஒரு தளவரைபு?

(அ) K_7 (ஆ) K_6

(இ) K_5 (ஈ) K_4

Which of the following is a planar graph?

- (a) K_7 (b) K_6
(c) K_5 (d) K_4

8. \overline{K}_5 -ன் வண்ண எண் _____.

- (அ) 2 (ஆ) 3
(இ) 5 (ஈ) 1

Chromatic number of \overline{K}_5 is _____.

- (a) 2 (b) 3
(c) 5 (d) 1

9. $f(G, \lambda) = \lambda^5 - 7\lambda^4 + 19\lambda^3 - 23\lambda^2 + 10\lambda$ எனில் G -யில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

- (அ) 4 (ஆ) 5
(இ) 7 (ஈ) 10

If $f(G, \lambda) = \lambda^5 - 7\lambda^4 + 19\lambda^3 - 23\lambda^2 + 10\lambda$ then the number of points in G is

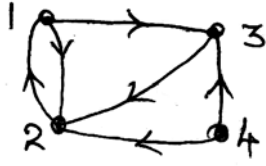
- (a) 4 (b) 5
(c) 7 (d) 10

10. கீழ்காணும் திசைவரைபில், 2-ன் உட்படி எது?



- (அ) 1 (ஆ) 2
(இ) 3 (ஈ) 4

What is the in-degree of 2 in the following diagraph?



- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) எந்தவொரு தன்நிரப்பு வரைபிற்கும் $4n$ அல்லது $4n + 1$ புள்ளிகள் உள்ளன என நிரூபி.

Prove that any self complementary graph has $4n$ or $4n + 1$ points.

Or

(ஆ) G என்பது (V_1, V_2) என இரு பிரிவுகளைக் கொண்ட ஒரு இருகூறு வரைபு மற்றும் G ஒரு k -ஒழுங்கு வரைபு, $k > 0$ எனில் $|V_1| = |V_2|$ என நிரூபி.

Let G be a k -regular bipartite graph with bipartition (V_1, V_2) and $k > 0$. Prove that $|V_1| = |V_2|$.

12. (அ) $P = (4, 4, 4, 2, 2, 2)$ ஒரு வரைபு தொடரா? ஆம் எனில் P -க்கான ஒரு வரைபை வரைக.

Is $P = (4, 4, 4, 2, 2, 2)$ a graphic sequence? If yes then draw a graph for P .

Or

(ஆ) G என்ற வரைபில் $\delta \geq k$ எனில் G -க்கு k -நீளமுள்ள ஒரு பாதை உண்டு என நிரூபி.

In a graph G , if $\delta \geq k$ then show that G has a path of length k .

13. (அ) ஒவ்வொரு மரத்தின் மையத்திலும் ஒரு புள்ளியோ அல்லது இரு அண்டை புள்ளிகளோ இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that every tree has a centre consisting of either one point or two adjacent points.

Or

(ஆ) $C(G)$ நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபி.

Prove that $C(G)$ is well-defined.

14. (அ) K_5 -ஒரு தள வரைபு அல்ல என நிரூபி.

Prove that K_5 is non-planar.

Or

(ஆ) தனித்த முறையில் n - வண்ணப்படுத்தக்கூடிய ஒவ்வொரு வரைபும் $(n-1)$ தொடர் வரைபு எனக் காட்டு.

Show that every uniquely n - colourable graph is $(n-1)$ connected.

15. (அ) இரு திசை வரைபுகள் சம ஒப்புமையுடையது எனில் ஒத்த புள்ளிகள் ஒரே படி ஜோடி கொண்டிருக்கும் என நிரூபி.

If two digraphs are isomorphic then prove that corresponding points have the same degree pair.

Or

(ஆ) $f(k_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)$ என நிரூபி.

Prove that

$$f(k_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1).$$

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) G என்பது முக்கோணங்கள் இல்லாத (p, q)

வரைபு எனில் $q \leq \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$ என நிரூபி.

If G is a (p, q) graph without triangles then

prove that $q \leq \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$.

Or

(ஆ) (i) ஒவ்வொரு வரைபும் வெட்டும் வரைபு எனக் காட்டுக.

(ii) G என்பது ஒரு (p, q) வரைபு என்க. $L(G)$ ஒரு (q, q_L) வரைபாகும் என நிறுவுக. இங்கு

$$q_L = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p d_i^2 \right) - q.$$

(i) Show that every graph is an intersection graph.

(ii) Let G be a (p, q) graph. Prove that $L(G)$ is a (q, q_L) graph where

$$q_L = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p d_i^2 \right) - q.$$

17. (அ) குறைந்தது இருபுள்ளிகள் கொண்ட ஒரு வரைபு G இருகூறு வரைபாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அதன் அனைத்து சுற்றுகளும் இரட்டைப் படை நீளத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Show that a graph G with atleast two points is bipartite iff all its cycles are of even length.

Or

- (ஆ) (i) ஒரு வரைபின் புள்ளி தொடர்ச்சி, கோடு தொடர்ச்சி இவற்றை வரையறு.
- (ii) முறையான குறியீடுகளின் படி $k \leq \lambda \leq \delta$ என நிரூபி.
- (i) Define vertex connectivity and edge connectivity of a graph.
- (ii) With usual notations, prove that $k \leq \lambda \leq \delta$.

18. (அ) ஒரு தொடுத்த வரைபு G ஆயிலீரியனாக அமைய தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை G -ன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் படியும் ஒரு இரட்டை படை எண் என நிறுவுக.

Prove that a connected graph G is Eulerian iff every point of G has even degree.

Or

- (ஆ) Dirac's-இன் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Dirac's theorem.

19. (அ) ஒரு வரைபை கோளத்தின் மேற்பரப்பில் பதிக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை அந்த வரைபை ஒரு தளத்தில் பதிக்க முடியும் என நிரூபி.

Prove that a graph can be embedded in the surface of a sphere iff it can be embedded in a plane.

Or

(ஆ) $\chi'(k_n) = \begin{cases} n, & n \text{ ஒரு ஒற்றைப்படை எண் } (n \neq 1) \\ n-1, & n \text{ ஒரு இரட்டைப்படை எண்} \end{cases}$

என நிறுவுக.

Show that

$$\chi'(k_n) = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is odd } (n \neq 1) \\ n-1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

20. (அ) $n \geq 2$ புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு வரைபு G மரமாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $f(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$ என நிரூபி.

Prove that a graph G with $n \geq 2$ points is a tree iff $f(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$.

Or

(ஆ) ஒரு வலுவற்ற திசை வரைபு D ஆயிலீரியன் திசை வரைபாக இருக்கத் தேவையானதும் நிபந்தனை என்னவெனில் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அகப்படியும் புறப்படியும் சமம் என நிறுவுக.

Prove that a weak digraph D is Eulerian iff every point of D has equal in-degree and out-degree.
